数理解析研究所講究録
675巻 1988年 147-158



# 普遍グラスマン多様体とアノマリー

数理解析研究所　高崎金久　(TAKASAKI Kanehisa)

## <<序説>>

アノマリー( anomaly)とは古典論の水準で存在していた対称性が量子化の過程で破れる現象の一種で，その最も簡単な例がカッツ・ムーディ代数( Kac-Moody algeras)の中心拡大項である．　カッツ・ムーディ代数（のうち $X_{\ell}^{(1)}$ というタイプのもの）は物理ではカレント代数(current algebras )として知られてきたもので，古典論での対称性を与えるループ代数（つまり単位円周上のゲージ変換の群のリー代数）の対応物をフォック空間上の作用素として作るときに，作用素として意味をもたせるための”正規積処方”により生じる交換関係の”異常”が中心拡大項に他ならない．（これがどういう系の対称性とその破れを与えるのか，ということはここでは論じない．）この場合は単位円周が量子場の棲む空間であるが，高次元の空間（例えば幾何学的な取り扱いの便宜のために球面を考えることが多い）では対応するアノマリーの様相はもっと複雑で，特性類などいろいろな幾何学的不変量が関係する．またコホモロジカルな構造が重要な役割を演じる．

ここで普遍グラスマン( Grassmann)多様体との関連で取り上げるのは基本的にはカレント代数とおなじ水準のアノマリーである．普遍グラスマン多様体の理論では $gl(\infty)$ あるいは $\widetilde{gl}(\infty)$ という無限次行列のリー代

数とその中心拡大が現れるが（筆者の記号法では $\widetilde{gl}(\infty)$ が中心拡大をあらわすので注意），中心拡大項を規定するのはカッツ・ピーターソン(Kac-Peterson)コサイクルと呼ばれるもので，適当な部分リー代数に制限すればカレント代数の中心拡大項を再現する．その意味でこのコサイクルも普遍的な性格をもつ．これを場の理論のアノマリーと出来るだけ比較しやすい形で理解するにはどうすればよいか，というのがそもそもの動機である．それが判れば，”高次元”への拡張を探るヒントになるのではないか，という狙いもある．

以下はそのような動機のもとにやってみた計算の記録である．なお，研究集会で話した内容の部には誤りがあった．それについては最後に触れる．

＜＜カレント代数とその拡張＞＞

アノマリーの定式化には Lagrange 形式とHamilton形式の２種類がある．これは一言で言えば時空上で考えるか時間を固定した面上で考えるかの違いであるが，実際に用いる道具立てがかなり異なる．ここでは後者の立場にたつ．このときにはアノマリーはある種の作用素の交換関係の異常として現れる．この作用素は系の対称性を記述するもので，古典論のレベルで対応する対称性があるのだが，”異常”と言うのは古典論と量子論とで交換関係の形が食い違ってくることを言う．カレント代数はそのような交換子アノマリーの最も簡単な例になってる．

この場合の古典論の対称性はいわゆるループ代数によって記述される．ループ代数は次のような交換関係に従う基底 $\{X_a(m);\ 1 \le a \le \dim(\underline{g}),\ m \in \mathbb{Z}\}$ をもつ（ $\underline{g}$ は有限次元リー代数）：

$$[X_a(m), X_b(n)] = f_{ab}{}^c X_c(m+n)$$

ここに$f_{ab}{}^c$は $\underline{g}$ の基底 $\{X_a\}$ （$X_a(0)$ と同一視できる）に対する構造定数である．これを普通は$\underline{g} \otimes \mathbb{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$，つまり単位円周 $S^1$ ( = $\{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| = 1\}$)から $\underline{g}$ への写像のなすリー代数の代数的モデルとしてとらえる．$X_a(m)$ はこのとき $X_a \otimes \lambda^m$ と同一視される．このことから判るように，ループ代数は単位円周上のゲージ変換群のリー代数のモデルである．ちなみに単位円周が時間一定の面，半径方向が時間発展にあたる．つまりこれは２次元時空の理論なのである．

さてこれを量子化すると言うことはこのループ代数をフォック空間の上の作用素（演算子と言う方が物理の気分にあっているが）として実現することである．但し用いるフォック空間は対応する量子系による．普通は自由フェルミ場の系を用いる．ところが $X_a(m)$を表現するものをフォック空間の上の作用素として作ろうとすると基本的な作用素（フェルミ的調和振動子）からなるある種の無限和がどうしても必要になる．この無限和はそのままでは作用素として発散するので適当に修正しなければならない．この修正は素朴な意味での作用素の表示（発散を含む）をいわゆる”正規積”で置き換えることで充分である．これは実際には無限大の値をとる定数を引算することである．（$X_a(m)$ を表現する作用素がフェルミ的調和振動子の２次形式になっているから．）この結果，量子化レベルでの対称性の実現 $\tilde{X}_a(m)$ は次の交換関係に従う：

$$[\tilde{X}_a(m), \tilde{X}_b(n)] = f_{ab}{}^c\, \tilde{X}_c(m+n) + n\delta_{m+n,0}\mathrm{tr}(X_a X_b)$$

右辺の最後の項が交換関係の”異常項”である．この項が他の生成元とすべて可換なので，こうして得られるカレント代数はループ代数の１次元中心拡大となる．

このカレント代数の自由フェルミ場による構成はもうすこし拡張される（文献３参照）．いま

$$gl(\infty) = \{ A = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}} \ ; \ a_{ij}=0 \ (j-i>m;\ m \text{ は } A \text{ に依存する})\}$$

を考えるとこれはリー代数をなす．ループ代数はこの中に

$$\Sigma A_n\lambda^n \ \rightarrow \ \Sigma A_n\otimes\Lambda^n \ , \ \ \Lambda^n = (\delta_{i,j-n})_{i,j\in\mathbb{Z}}$$

という対応で埋めこめる．$gl(\infty)$ のほうでも自由フェルミ場のフォック空間でやはり交換関係に異常をもつ表現が作れる．そうして得られるリー代数 $g\tilde{l}(\infty)$はやはり $gl(\infty)$の１次元中心拡大で，交換関係の異常項は $tr(A_{-+}B_{+-}-A_{+-}B_{-+})$，但し $A_{+-} = (a_{ij})_{i\geq 0,j<0}$, $A_{-+} = (a_{ij})_{i<0,j\geq 0}$, というものになる．これは $gl(\infty)$の定数係数コホモロジーの自明でない元を与えるが，これがカッツ・ピーターソンコサイクルである．

＜＜普遍グラスマン多様体＞＞

普遍グラスマン多様体（UGM ）の構成の仕方はいろいろあるが（文献１，２参照）ここでは次のように定義する：

$$UGM = Fr(\mathbb{Z},\ \mathbb{N}^c)/GL(\mathbb{N}^c), \qquad \mathbb{N}^c = \{-1,-2,\cdots\},\ \mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$$

ここで

$$Fr(\mathbb{Z},\ \mathbb{N}^c) = \{\xi = (\xi_{ij})_{i\in\mathbb{Z},j\in\mathbb{N}^c};\ \xi_{ij} = \delta_{ij} \ (i\leq j,\ i<-m;\ m \text{ は } \xi \text{ に依存する})\}$$

$$GL(\mathbb{N}^c) = \{h = (h_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}^c};\ h_{ij} = \delta_{ij} \ (i\leq j,\ i<-m;\ m \text{ は } h \text{ に依存する}),\ (h_{ij})_{-m\leq i,j<0} \in GL(m)\}$$

UGM の上には次のような GL(1)主束 $U\tilde{G}M$が乗っている：

$$U\tilde{G}M = Fr(\mathbb{Z}, \mathbb{N}^c)/SL(\mathbb{N}^c) \xrightarrow{\pi} UGM \quad (自然な射影)$$

$$SL(\mathbb{N}^c) = \{ \underline{\qquad\qquad\qquad}, (h_{ij})_{-m\le i,j<0} \in SL(m)\}$$

有限次元ではこのようなグラスマン多様体には一般線型群の左からの作用があって自然に等質空間になっている．普遍グラスマン多様体の場合は無限次元性のために話はやや微妙であるが，リー代数のレベルではあまり問題はなく，$gl(\infty)$ の無限小作用，つまり

$$\delta : gl(\infty) \to \{UGM 上のヴェクトル場\}$$

というリー代数準同型が作れる．有限次元の場合はこれがそのままGL(1)主束に持ち上がるのだが，無限次元の場合にはそうではなく（これは本質的には前述の”正規積”処方と関係する）

$$\tilde{\delta} : \tilde{gl}(\infty) \to \{U\tilde{G}M 上のヴェクトル場\}$$

という風にリー代数も補正されて持ち上がる．

この事情を説明するために”プリュッカー座標”の概念を導入する．プリュッカー座標を $\xi \in Fr(\mathbb{Z}, \mathbb{N}^c)$に対して

$$\xi_\sigma = \det(\xi_{\sigma_i j})_{i,j<0}$$

と定義する．但し $\sigma = (\sigma_i)_{i<0}$は有限個の $i$ を除いて $\sigma_i=i$ となっているような任意の整数列である．また行列式は

$$\det(\xi_{\sigma_i j})_{i,j<0} = \lim_{m\to\infty} \det(\xi_{\sigma_i j})_{-m\le i,j<0}$$

と理解する．右辺は十分先で一定の値をとるので極限の意味には問題はない．プリュッカー座標の間には２次の関係式（プリュッカー関係式）があり，それらの生成するイデアルでプリュッカー座標の生成する多項

式環を割ったものは $U\tilde{G}M$ の上の（代数幾何的な意味での）函数環とみなせる．（関係式があるから"座標"と呼ぶのはあまりふさわしくないが，実はプリュッカー座標は射影的埋め込みをするときの射影空間の方の座標に対応している．本来の多様体論的な座標はあとで述べるアフィン座標により与えられる．）

有限次元の場合に習って行列単位 $E_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{i,j\in\mathbf{Z}}(k,l\in\mathbf{Z})$ の無限小作用を計算すると，それはプリュッカー座標に対して

$$\delta(E_{ij})\xi_\sigma = \xi_{\sigma(i\to j)} = \sum_{k<0} \delta_{\sigma_k i}\xi(\ldots\sigma_{k-1}j\sigma_{k+1}\ldots)$$

と作用することが判る．（$\sigma(i\to j)$ は一言で言えば $\sigma=(\sigma_k)_{k<0}$ において $i$ を $j$ で置き換えたものである．）行列単位の有限和を考える限りは何も問題はないのだが，$gl(\infty)$ の元は一般に無限和からなり，発散を引き起こす．実際，$A = (a_{ij}) \in gl(\infty)$ に対して素朴に無限小作用を考えると

$$\delta(A)\xi_\sigma = \sum_{i,j\in\mathbf{Z}} a_{ij}\xi_{\sigma(i\to j)}$$

となるが，対角線から $\sum_k a_{\sigma_k\sigma_k}\xi_\sigma$ という発散項が生じる．（非対角部分では実は有限項しか生き残らないので何も問題はない．）

この発散を除くため無限小作用の定義を次のように修正する．

$$\tilde{\delta}(A)\xi_\sigma = \sum_{i,j\in\mathbf{Z}} a_{ij}(\xi_{\sigma(i\to j)} - \delta_{ij}\theta(i<0)\xi_\sigma)$$

但し $\theta(i<0) = 1$ $(i<0)$; $= 0$（その他），これは次のようにもいい替えられる：

$$\tilde{\delta}(A) = \sum_{i,j\in\mathbf{Z}} a_{ij}(\ \delta(E_{ij}) - \delta_{ij}\theta(i<0)M\ )$$

ここで M は

$$M\xi_\sigma = \xi_\sigma \quad \text{（全てのプリュッカー座標に対して）}$$

により定義される $\widetilde{UGM}$ 上のヴェクトル場である．この補正は前述の正規積をとる操作をプリュッカー座標の言葉に翻訳したものである．

こうして補正された無限小作用は次の交換関係に従う：

$$[\tilde{\delta}(A), \tilde{\delta}(B)] = \tilde{\delta}([B, A]) + c(A, B)M,$$
$$[\tilde{\delta}(A), M] = 0$$

ここで

$$c(A, B) = \mathrm{tr}(B_{-+}A_{+-} - A_{-+}B_{+-}) .$$

これはカッツ・ピーターソンである（正確には，交換関係の右辺で [B, A]というように交換子の順序が逆転していることに対応して，カッツ・ピーターソンコサイクルそのものとは符号が逆のはずであるが）．

＜＜アフィン座標による考察＞＞

普遍グラスマン多様体の上で $\xi_\sigma \neq 0$ という部分集合は（無限次元の）アフィン空間と同型であり，同型を与えるアフィン座標系もプリュッカー座標を用いて具体的に作ることが出来る．$\sigma$ をあらゆる場合にわたって走らせれば普遍グラスマン多様体を覆うアフィン座標系が出来る．ここでは $\sigma = \phi = (\ldots -3\ -2\ -1)$ という場合をもっぱら扱うことにする．（$\phi$ という記号は対応するヤング図形が空集合になることにちなんでいる．文献１，２参照）

$$UGM_\phi = \{ \xi \in \mathrm{Fr}(\mathbb{Z}, \mathbb{N}^c);\ \xi_\phi \neq 0 \}/GL(\mathbb{N}^c)$$

これに属する$\xi$の代表系として

$$\xi_{ij} = \delta_{ij} \quad (i, j < 0)$$

という条件を満たすものがとれる(この様な$\xi$を"正規化されている"と言うことにする).このとき残りの行列要素は

$$\xi_{ij} = \xi_{\phi(j\to i)}/\xi_\phi$$

となっている.これを改めて$w_{ij}$と置く:

$$\mathbf{W}_\phi = (w_{ij})_{i\geq 0, j<0}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{W}_\phi \end{pmatrix} \bmod GL(\mathbb{N}^c)$$

このアフィン座標近傍の上では GL(1) 主束 $\widetilde{UGM}$ もまた自明化されている,と言うのが大切な点である.具体的には

$$\pi^{-1}UGM_\phi \tilde{\to} UGM_\phi \times GL(1) \quad \tilde{\to} Mat(\mathbb{N}, \mathbb{N}^c) \times GL(1)$$

$$\xi \bmod SL \to (\xi \bmod GL, \xi_\phi) \to (\mathbf{W}_\phi, \xi_\phi)$$

となっていて,$\xi_\phi$が実は局所自明化におけるファイバー座標であることも判る.(同様のことはプリュッカー座標から上のようにして作られる他のあらゆるアフィン座標についても言える.)

さてこのアフィン座標を用いて前述の$\tilde{\delta}(A)$を考えてみると,これは$\mathbf{W}_\phi$, $\xi_\phi$に対して次のように作用することが判る:

$$\tilde{\delta}(A)\mathbf{W}_\phi = A_{+-} + A_{++}\mathbf{W}_\phi - \mathbf{W}_\phi A_{--} - \mathbf{W}_\phi A_{-+}\mathbf{W}_\phi,$$

$$\tilde{\delta}(A)\xi_\phi = tr(A_{-+}\mathbf{W}_\phi)\xi_\phi \quad ( = \tilde{\omega}(A, \mathbf{W}_\phi)\xi_\phi \text{ とおく}).$$

ちなみに一般に発散を含んでいる$\delta(A)$の方は

$$\delta(A)W_\phi = A_{+-} + A_{++}W_\phi - W_\phi A_{--} - W_\phi A_{-+}W_\phi,$$

$$\delta(A)\xi_\phi = \mathrm{tr}(A_{--} + A_{-+}W_\phi)\xi_\phi \quad ( = \omega(A, W_\phi)\xi_\phi \text{ とおく}).$$

となる．つまりファイバー方向のみが異なる．このことを

$$M = \xi_\phi \partial/\partial\xi_\phi \quad (\text{座標系 } \{W_\phi, \xi_\phi\} \text{ において})$$

に注意して，次のように $UGM_\phi$ 上の局所自明化に関するヴェクトル場の”水平方向”（底空間方向）と”垂直方向”（ファイバー方向）への分解の仕方を与えるものとして理解することも出来る：

$$\tilde{\delta}(A) = \pi_*\tilde{\delta}(A) + \tilde{\omega}(A, W_\phi)M,$$

$$\delta(A) = \pi_*\delta(A) + \omega(A, W_\phi)M.$$

このとき次の基本的な関係式が成り立っているわけである．

$$\pi_*\tilde{\delta}(A) = \pi_*\delta(A),$$

$$\tilde{\omega}(A, W_\phi) = \omega(A, W_\phi) - \mathrm{tr}\, A_{--}.$$

最後の式を見ると発散している係数から発散項（確かに行列の対角部分からの寄与である）が引算されている様子がよく判る．

カッツ・ピーターソンコサイクルは上で導かれた量と

$$c(A, B) = \delta(A)\tilde{\omega}(B, W_\phi) - \delta(B)\tilde{\omega}(A, W_\phi) - \tilde{\omega}([B,A], W_\phi)$$

という関係で結ばれている．これは特に c(A, B)がコサイクルであることを示しているが，注意すべきは右辺が変数係数（$W_\phi$に依存する）の意味でのコバウンダリーであって，定数係数の意味ではコバウンダリーで

はないという点である（実際，カッツ・ピーターソンクラスは自明でないコホモロジーの元を与える）．これがこの表示の面白いところである．

上の状況で$c(A,B)$が$W_\phi$に依らなくなるのは基本的には発散の引算項が $trA_{--}$という$W_\phi$に依らないものだからである．引算項がそのようなもので良いのはリー代数 $gl(\infty)$ に属する性質であり，別のリー代数に対しては

$$\tilde{\omega}(A, W_\phi) = \omega(A, W_\phi) - \Delta\omega(A, W_\phi) \quad (\text{第２項は引算項})$$

というように$W_\phi$に本当に依存するものをとらねばならなくなる可能性がある．その場合には交換関係の異常項係数も $c(A, B, W_\phi)$というように$W_\phi$の函数になるので，コホモロジーの意味も違ってくる．また，得られるリー代数も１次元中心拡大ではなく一般には無限次元アーベル拡大となる．この様な拡張が実際に高次元のアノマリーに関して議論されている（文献４参照）．

＜＜締めくくり＞＞

プリュッカー座標は無限行列式として定義されている．一方，Lagrange形式でのアノマリーの定式化はやはりある種の無限行列式の振舞い（外部パラメータに対する応答）に着目するもので，その意味では我々の方法は Lagrange 形式での理解の仕方とも接点をもつ．ここで紹介した議論ではグラスマン多様体に関してよく知られたことばかりを使っていて，無限小作用をアフィン座標を使って書いてみるという点のみが新しい工夫と言えば言えなくもないが，それでもアノマリーという現象を（かなりモデル化された状況でではあるが）新しい目で眺めてみる為のヒントにはなるのではないかと思われる．

なお，研究集会では以上のような議論がさらに接続や曲率の言葉で説明できると言明したが，それは間違っていたので取り消す（文献５参照のこと）．実はそのような見方もリー代数を gl(∞) から u(∞)（ユニタリ群のリー代数）に縮小すれば可能なのだが（このこと自体は良く知られていることである）gl(∞) そのもののレベルでそういう解釈を定式化するにはグラスマン多様体を何か別のものに置き換えなければならないようである．（１９８８年５月）

＜＜文献＞＞

1. M. Sato and Y. Sato, Soliton Equations as Dynamical System on Infinite Dimensional Grassmann Manifold, in "Non-near P.D.E. in Applied Science", Proc. U.S.-Japan Seminor Tokyo 1982, P.D. Lax and H. Fujita eds., North-Holland and Kinokuniya 1982.

普遍グラスマン多様体に関する基本的なことはこの論文に全て依っている．

2. 佐藤幹夫，野海正俊，ソリトン方程式と普遍グラスマン多様体，上智大学講究録Ｎｏ．１８　（１９８４）．

上記論文の内容のうち普遍グラスマン多様体と擬微分作用素・ＫＰ方程式の関係を中心にした詳細がまとめられている．

3. E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, Transformation Groups for Soliton Equations, in "Non-linear Integrable Systems - Classical Theory and Quantum Theory -", Proc.

RIMS Symposiun May 1981, M. Jimbo and T. Miwa eds., World Scientific 1983.

後半に自由フェルミ場を用いる方法とカッツ・ムーディ代数への応用の詳細が解説してある.

4. J. Mickelsson and S. G. Rajeev, Current Algebras in d+1-dimensions and Determinant Bundles over Infinite Dimensional Grassmannians, Commun. Math. Phys. 116 (1988),365-400.

5. K. Takasaki, Geometry of Universal Grassmann Manifold From Algebraic Point of View, preprint RIMS-623 (May 1988)

これは RIMS-612 "Geometry of Universal Grassmann Manifold - Line Bundle, Connection, and Curvature -"の改訂版である. 本文でも触れたように, RIMS-612の副題に関する部分は間違いだった. 本文の詳細並びに関連する文献についてはこの論文を参照されたい. (そして, 出来れば RIMS-612 のことは忘れてください.)